

Projektarbeit: Das Unendliche in der Mathematik

Die Eulersche Zahl e



$\sim 2,71828182845904523536028747135266249775$
 $7247093699669676277240766.....$

von
Julia Brand

KS 13, 24.05.04

Inhaltsverzeichnis:

1. Kurzbiografie von Leonhard Euler
2. Die Eulersche Zahl e
3. Die Eulersche Zahl und Unendlichkeit
4. Quellenangaben

1. Kurzbiografie von Leonhard Euler



- **15. April 1707:** Leonhard Euler wird in Basel als Sohn eines Pfarrers geboren. Seinen ersten Mathematikunterricht erhielt er von seinem Vater, der bei Jakob Bernoulli studiert hatte.

→ Vater Paul Euler erkennt das Talent seines Sohnes und schickt diesen zu Johann Bernoulli, der Leonhard Euler gemeinsam mit seinen eigenen Söhnen Niklaus und Daniel in Mathematik unterrichtet.

- **1720:** Philosophiestudium

- **1724:** Magisterwürde in Philosophie

- **Frühjahr 1727:** L. Euler übersiedelt nach St. Petersburg.

Im selben Jahr entdeckt und benennt er die Zahl e , die später bekannt ist unter dem Namen ‚Eulersche Zahl‘.

- **1730:** Professor in Physik

- **1733:** Professor in Mathematik (als Nachfolger von Johann Bernoullis Sohn Daniel)

Heirat mit Katharina Gsell. Aus dieser Ehe gehen dreizehn Kinder hervor, von denen aber nur fünf am Leben bleiben.

- **1735:** L. Euler leidet an einer schweren Krankheit → Erblindung auf einem Auge

- **1741:** Umzug nach Berlin

- **1746:** Euler ist Direktor der mathematischen Klasse an der Berliner Akademie.

- **1773:** Tod seiner Frau

- **1776:** Rückkehr nach St. Petersburg

L. Euler heiratet Salome Abigail Gsell, die Stiefschwester seiner 1. Frau. Im selben Jahr erblindet er völlig, was ihn jedoch nicht davon abhielt, weiterzuarbeiten.

- **18. September 1783:** Tod Eulers durch einen Schlaganfall.

Zitat über Euler:

„ Wenn man aus des großen Eulers Werkes alles wegnehmen wollte, was nicht unmittelbare Anwendung im Praktischen hat, so würden sie sehr zusammenschmelzen. Der große Mann hat sich sehr mit den abstraktesten Vergleichen der Größe beschäftigt, welche die Nachwelt erst zu gebrauchen wissen wird.“

Euler war in der Tat einer der produktivsten und bedeutendsten Mathematiker, doch zu seinen Lebzeiten wussten viele Menschen seine Arbeit noch nicht zu schätzen. Heute wissen wir jedoch, dass Euler uns in sehr vielen Bereichen der Mathematik fundamentale Erkenntnisse geliefert hat.

2. Die Eulersche Zahl e



~2,718281828459045235360287471352662497757247093699669676277
240766.....

1727 entdeckte der bedeutende Mathematiker Leonhard Euler diese ganz besondere Zahl, welcher er den Buchstabe e zuteilte. Die Bezeichnung e stammt entweder von dem Anfangsbuchstaben seines Nachnamens oder vom Anfangsbuchstabe des Wortes „exponentiell“. Später wurde e dann auch gemäß ihres Entdeckers ‚Eulersche Zahl‘ genannt.

Die Eulersche Zahl e gehört neben π wohl zu den wichtigsten Zahlen der Mathematik. e ist zwar nicht so bekannt wie π (vermutlich weil sie noch nicht so lange bekannt ist wie π), doch sie ist weitaus universeller als dieses.

Die Eigenschaften der Eulerschen Zahl:

1. Definition von e :

Die Zahl e kann durch Grenzwertbildung definiert werden.

Die zwei bekanntesten Darstellungen sind:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

bzw. abgekürzt durch Fakultät:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

2. e ist *irrational*, d.h. die Zahl e ist weder als ganze Zahl, noch als Bruch darstellbar. Es ist eine reelle Zahl, deren Dezimaldarstellung weder abbricht, noch periodisch ist. Vielmehr verfügt e über unendlich viele Nachkommastellen, die scheinbar keiner Ordnung unterliegen. Den Beweis der Irrationalität von e erbrachte Jean Baptiste Fourier (1768-1830).

3. e ist eine *transzendente Zahl*, was bedeutet, dass sie niemals die Lösung einer algebraischen Gleichung, bzw. nicht die Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ($a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$) sein kann. Die transzendente Zahl ist das Gegenteil der algebraischen Zahl. Dass e transzendent ist, bewies erstmals Charles Hermite (1822-1901).

[Begriffsdefinition „Transzendenz“ im alltäglichen Sprachgebrauch: Bezeichnung von Wirklichkeitsebenen, welche die Vorstellung und das Wahrnehmungsvermögen überschreiten.]

4. e spielt in der Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung) eine große Rolle. Die e -Funktion bleibt nämlich beim ableiten und integrieren unverändert.

5. e taucht in nahezu allen Bereichen der Wissenschaft auf und liegt vielen Wachstumsprozessen in der Natur zugrunde, weshalb sie auch Basis des natürlichen Logarithmus genannt wird.

Sie darf nicht fehlen, wenn es um exponentielles Wachstum (z.B. Bakterienvermehrung) oder exponentielle Abnahme (z.B. Zerfall einer radioaktiven Substanz) geht.

Bei exponentiellem Wachstum wächst der Bestand immer gemäß e .

Die Botschaft der Zahl e könnte lauten: „Wer hat, dem wird gegeben“, denn dies bedeutet, dass ein um das doppelte gewachsener Organismus doppelt so schnell weiterwächst. Dreifache Grösse bedeutet dreifaches Wachstum, usw....
So lässt sich beispielsweise auch die Geschwindigkeit, mit der Bäume an Biomasse zulegen, auf der Basis von e berechnen. Immer wenn es um exponentielle Vorgänge(Wachstum, Wachstumsdynamik, Änderungsraten) geht, spielt die Eulersche Zahl e eine bedeutende Rolle.
Das heißt, wo immer etwas lebt, ist e im Spiel...

6. e auf dem Geldmarkt

Mit e können wir berechnen, wie ein Vermögen wächst, wenn die Zinsen der Zinseszinsen verzinst werden. Wenn sich ein Vermögen verdoppelt, so wächst es bei gleicher Verzinsung auch doppelt so schnell weiter.

Momentan sind die Zeiten für Anleger schlecht, da die Zinsen minimal sind. Darum träume ich einmal und stelle mir eine Bank vor, die mir 100% Zinsen gibt:
So werden aus einem Euro innerhalb eines Jahres zwei Euro.

Ich habe nun die kluge Idee, die Geschäftsbedingungen auszureizen und hebe nach einem halben Jahr den bis dahin angehäuften Betrag von 1,5 Euro(mit Zinsen bei einem Euro Einlage) ab und lege ihn sofort wieder an. Nach einem weiteren halben Jahr ist daraus das 1,5-fache geworden, also 2,25 Euro.

Mit dem Ziel, mein Vermögen weiter zu vergrößern erhöhe ich nun die Besuchsfrequenz und schichte mein Geld bereits nach jedem Quartal um. Und tatsächlich: Nach einem Jahr ist aus dem einen Euro nach einem Jahr der schon stattlichere Betrag von 2,44 Euro($1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,25 = 2,44$) geworden.

Ich frage mich nun, ob nicht eine tägliche oder gar stündliche, minütliche oder gar sekundliche Geldumschichtung zu noch besseren Ergebnissen führen würde...

ABER: Auf diese Weise sind leider keine beliebig hohen Gewinne zu erzielen. Es gibt vielmehr eine natürliche Grenze, die nicht überschritten werden kann.

Die Überraschung:

Diese **Grenze ist die Zahl 2,71828.....**, die berühmte **Eulersche Zahl e** .

Dies liegt an der Grenzwertbildung durch die e definiert ist(siehe 1.). Das bedeutet also, dass man selbst bei stetiger Verzinsung und einem Zinssatz von 100% - ausgehend von einem Betrag a in beliebiger Währung- am Ende des Jahres nur ein Guthaben von $a \cdot e$, also 2,7182..... mal soviel Geld wie am Anfang des Jahres hat.

Mit der stetigen Verzinsung ist also kein unendlicher Reichtum zu erlangen, sondern es gibt eine Schranke, nämlich den Grenzwert e .

3. Die Eulersche Zahl e und Unendlichkeit



Begriff Unendlichkeit:

Die **Unendlichkeit** ist ein der direkten menschlichen **Erfahrung** fremdes **Phänomen**. Sie kann nur **abstrakt** in der **Vorstellung** entwickelt werden und wird auf **Objekte**, die keine räumlichen oder zeitlichen **Grenzen** besitzen, angewendet...

In der Eulerschen Zahl e selbst steckt die Unendlichkeit, denn e ist eine *irrationale* und *transzendente Zahl* mit unendlich vielen Dezimalstellen, die keiner regelmäßigen Abfolge zugrunde liegen.

Unglaublich, aber noch kein Mensch hat jemals die Dezimaldarstellung von e ganz sehen können, denn das ist wegen der unendlich vielen Nachkommastellen grundsätzlich ausgeschlossen und wird auch in Zukunft selbst mit den allerbesten PCs niemals möglich sein. Niemand weiß, wie es „ganz weit hinten“ aussieht und weitergeht, denn die Nachkommastellen von e bilden eine sinn-, bzw. regellose Folge von Ziffern, die sich nicht periodisch wiederholen. Und genau damit tun wir Menschen uns schwer und wir haben Mühe, dies zu akzeptieren, da wir evolutionär darauf getrimmt sind, in allem eine (logische) Ordnung zu sehen oder sie notfalls hineinzusehen...

Geklärt ist allerdings, dass sich die unendliche Zahlenfolge von e nie wiederholt und irgendwann findet sich in ihr jede endliche beliebige Zahlenfolge.

Darum ist es bei e genauso wie bei Pi möglich, dass man jeder Ziffer, oder zwei Ziffern, einen **Buchstaben** zuordnet. Mithilfe der 'übersetzten' Ziffern würde man dann irgendwo in der unendlichen Reihe von e lesen können. Aufgrund der unendlichen Variationsbreite und endlosen Zahlenkombinationen der Nachkommastellen steht also an irgendeiner Stelle der Eulerschen Zahl e alles, was jemals geschrieben wurde und in Zukunft geschrieben wird! Damit steckt in ihr praktisch das gesamte Wissen unserer Erde....

Diese Dimensionen der Unendlichkeit sind so abstrakt, dass sie jegliches menschliche Vorstellungsvermögen überschreiten. Aus vermutlich diesem Grund der Unerreichbarkeit und Unfassbarkeit übt die Zahl e seit jeher auf Menschen, die sich mit ihr beschäftigen, eine große Faszination aus...

4. Quellenangaben:

<http://homepage.hispeed.ch/sasaparad/Gammafunktion.htm>
<http://homepages.compuserve.de/thweidenfeller/mathematiker/euler.htm>
<http://www.thg.aa.bw.schule.de/Notizbuch/komplex/euler.htm>
http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=302&ref=http://www.google.de/search?qX=Biografie+Leonhard+Euler%26hlX=de%26lrX=lang_de%26ieX=UTF-8%26startX=10%26saX=N
<http://www.emath.de/Mathe-Board/messages/3/6494.html?1081709778>
<http://www.mathe-online.at/mathint/log/i.html>
<http://www.kk.s.bw.schule.de/mathge/euler.htm#Lebensdaten>
http://www.matheboard.de/lexikon/index.php/Eulersche_Zahl
http://www.academicus.ch/de/transzendente_zahl.html
<http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=98&ref=http://www.google.de/search?qX=transzendente+Zahl%26hlX=de%26lrX=%26ieX=UTF-8%26startX=10%26saX=N>
<http://www.lexikon-online.info/q/Unendlich>
<http://www.definition-info.de/Transzendenz.html>
http://www.school-scout.de/Mathe_Euler.cfm
<http://www.mathematik-online.de/F52.htm>
http://home.t-online.de/home/primzahl/pi_e.html
http://www.stauff.de/matgesch/dateien/wurzelbeweis/dateien/folgerungen_rechts.htm
<http://www.morgenwelt.de/wissenschaft/9906-zahlen.htm>
<http://www.morgenwelt.de/311.html>
<http://www.google.de/search?q=cache:Em5M1AxAYpUJ:www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Vortrag/unendlich.pdf+Unendlichkeit+Eulersche+Zahl&hl=de&ie=UTF-8>
<http://www.anarchie.de/noindex/ausklapp-37470.html>
http://www.komunikacija.org.yu/komunikacija/casopisi/teaching/II_2/d003/download
http://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/seminar/arbeiten/arbeit_tina.pdf
<http://www.mathe.braunling.de/E.htm>
<http://home.t-online.de/home/arndt.bruenner/mathe/bilder/euler.gif>
http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl
http://members.tripod.com/sfabel/mathematik/epochen_aufkl_eu.html
<http://www.emath.de/Mathe-Board/messages/3/5586.html?1077193504>
<http://www.appelt.org/unendlichkeit.jpg>
<http://www.rhirte.de/vb/bilder/e2.gif>