

Fraktale

1. Einleitung :



Um solche grafischen Gebilde handelt es sich in unserem mathematischen Referat.

Wir werden in möglichst nicht-mathematischer Sprache, also für jedermann zugänglich, beschreiben, welche unterschiedlichen Versionen es gibt und dann genauer auf die Mandelbrotmenge eingehen.

In dieser Arbeit soll der Bezug zur Unendlichkeit hergestellt werden.

Wir hoffen, dass nach der Lektüre des Referates einigen klar geworden ist, wie solche Abbildungen entstehen.

2. Definition :

Das Wort „Fraktal“ kommt aus dem Lateinischen und bedeutet übersetzt gebrochen.

Alle Arten von Fraktalen haben zwei wesentliche Eigenschaften, die in allen Abbildungen auch erkennbar sind.

Zum einen ist dies die Selbstähnlichkeit, welche sich dadurch auszeichnet, dass jeder beliebig kleine Ausschnitt dem Ganzen ähnlich ist. Also egal wie weit man in die Bilder hineinzoomt, man erkennt immer wieder schon gesehene Elemente.

Die zweite Eigenschaft wird gebrochene Dimension genannt, diese wird näher erläutert in der Arbeit von Theresa M. und Tamina R. .

Der Begriff Mandelbrot hat seinen Namen dem polnischen Mathematiker Benoit Mandelbrot zu verdanken, der im Jahre 1923 geboren wurde und im Jahr 1980 diese Bilder errechnet hatte. Diese Entdeckung ist wahrscheinlich auf einen Programmierfehler zurückzuführen.

1980 fand Benoît B. Mandelbrot die berühmte Figur, das Apfelmännchen (so wurde es später von der Bremer Forschungsgruppe für komplexe Dynamik benannt).

Durch diese Entdeckung sind Fraktale nicht mehr durch die bekannten Begriffe wie Punkt – Linie – Fläche zu beschreiben, sondern sie sind unendlich lang und selbstähnlich.

Ordnung geht dabei in Chaos über, wodurch Länge oder Flächeninhalt nicht mehr bestimmbar sind. Die verblüffenden graphischen Gebilde werden durch Komplexe Iterationsgleichungen und Vereinbarungen über Iterationstiefe und Grenzwerte erzeugt.

3. Verschiedene Arten im Vergleich

Es gibt zwei Arten von Fraktalen, die sich grundlegend unterscheiden, was bereits an der Bezeichnung zu merken ist. Zum einen wären dies die geometrischen Fraktale, wie beispielsweise das Sierpinski-Dreieck. Auf diese Art der Fraktale geht die oben erwähnte Arbeit genau ein.

Die Art mit der wir uns hiermit beschäftigen kann man als nicht-geometrische Fraktale bezeichnen. Das wohl bekannteste dieser Grafiken ist das Apfelmännchen von dem die gesamten Rechnungen ausgingen. Das sogenannte Ur-Apfelmännchen war das zuerst entdeckte Bild das diese charakteristische Form besitzt. Allgemein sind Fraktale dieser Art als Mandelbrotmengen zu bezeichnen. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit lediglich mit diesen Gebilden, es gibt jedoch noch ähnliche Grafiken, die sich beispielsweise Juliamengen nennen.

4. Mandelbrotmenge

In diesem Abschnitt werden wir nun erklären wie diese Apfelmännchen zustande kommen, wie es also möglich ist sie zu berechnen. Auf den ersten Blick scheint dies ein eher künstlerisches Thema zu sein, jedoch wird schon bald deutlich werden wie mathematisch das ganze aufgebaut wird – es handelt sich um eine mathematische Spielerei, die komplexe Zahlen voraussetzt. Was diese Bilder auszeichnet ist die Tatsache, dass man, sobald man am Rand des Apfelmännchens hineinzoomt irgendwann immer wieder das Ausgangsbild zu sehen bekommt.

Wie aber berechnet man solche unendlichen Bilder?!

Die Berechnung erfolgt durch die Folge $z_{n+1} = z_n^2 + c$, wobei $c = x + y \cdot i$ (Komplexe Zahl) ist. Die Iteration beginnt mit den Startwerten $x=y=0$ und nach einer bestimmten Anzahl von Rechenschritten oder nach der Überschreitung eines Abbruchwertes abgebrochen. C ist die Zahl der eine Farbe zugewiesen wird. $z_0=0$ ist die Anfangszahl.

	(0.20 0.20)	(0.10 0.65)	(-0.40 0.70)	(0.50 1.30)	
Nr. der Folge:	1.Folge:	2.Folge:	3.Folge:	4. Folge:	
1	0.23	0.66	0.81	1.4	
2	0,34	0.84	0.74	2.8	
3	0.35	0.44	0.51	6.5	(2 2)
4	0.33	0.57	1.0	43	
5	0.30	0.91	0.74	1900	5. Folge:
6	0.30	0.83	1.1	3 500 000	3.6
7	0.31	0.38	1.8	...	16
8	0.32	0.70	2.4		260
9	0.32	1.0	4.9		68 000
10	0.31	0,77	24		...
11	0.31	0.83	560		
12	0.31	1.3	320 000		
13	...	2.1	...		
		...			

Die erste Folge ist konvergent und strebt gegen 0.31. (Die Punkte mit konvergenten Folgen bilden das Apfelmännchen.). Die übrigen Folgen sind offenbar divergent. Die Glieder der Folge gehen über alle Grenzen, allerdings unterschiedlich stark. Überschreitet ein Glied der Folge den Abbruchwert (hier 2), so wird dem Wert des Vorgängerglieds eine Farbe aus einer Tabelle zugeordnet. Den konvergenten Folgen wird Schwarz zugewiesen, daraus resultiert das schwarze Apfelmännchen.

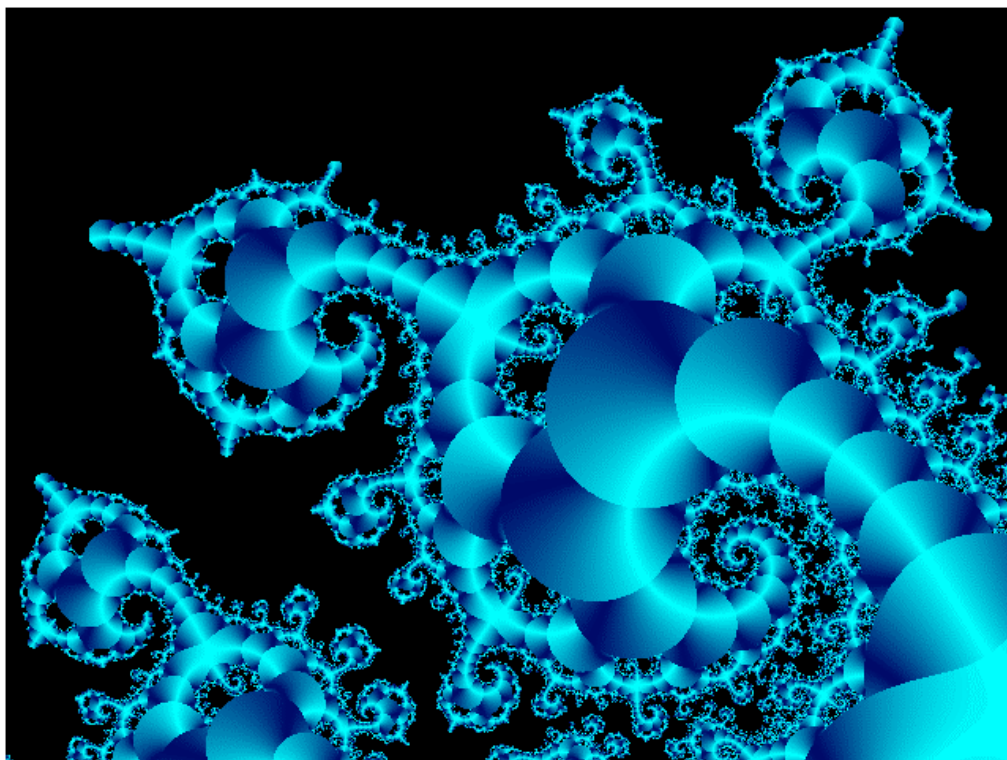
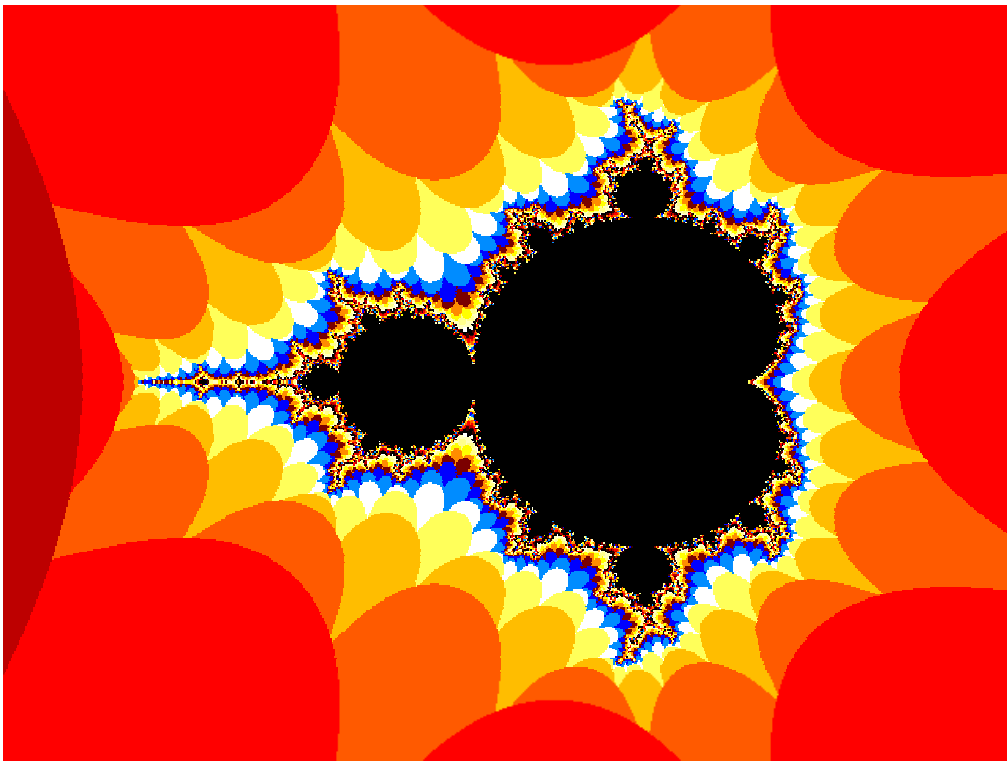
Doch bei 'vermeintlich' konvergenten Folgen taucht das Problem auf, dass wir nur endlich viele Folgenglieder ausrechnen können und die Folge in irgendeinem späteren Glied doch den Abbruchwert überschreitet. Diesen Fehler kann man durch die Berechnung von sehr vielen Folgegliedern vermindern, aber nicht ausschließen.

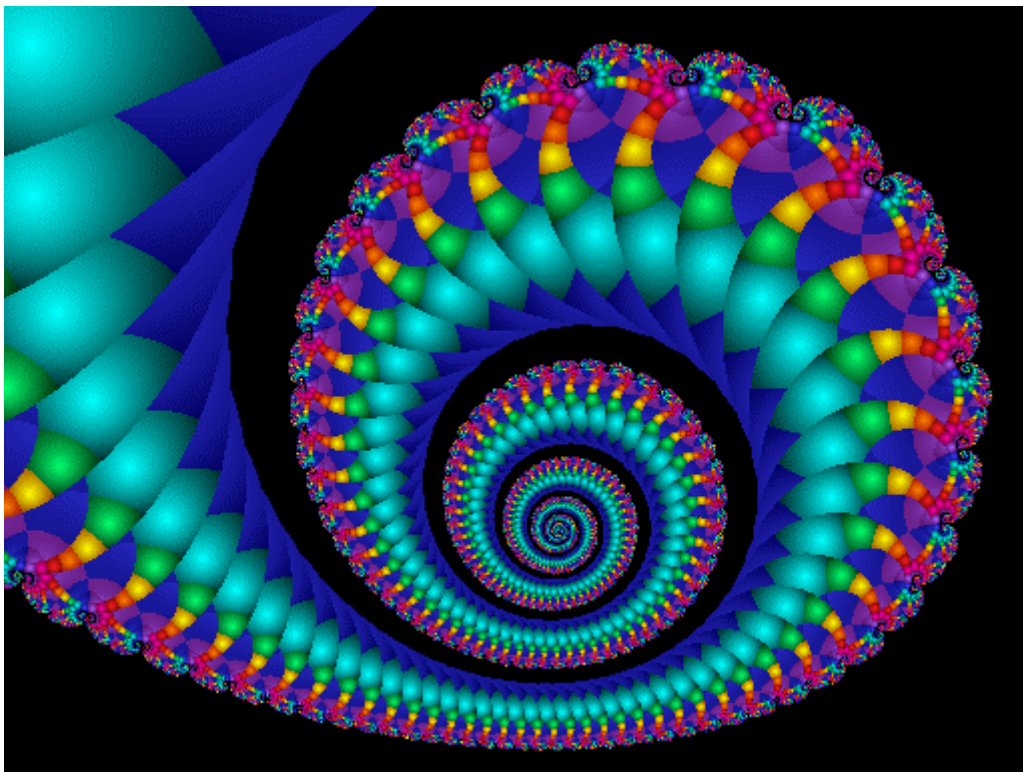
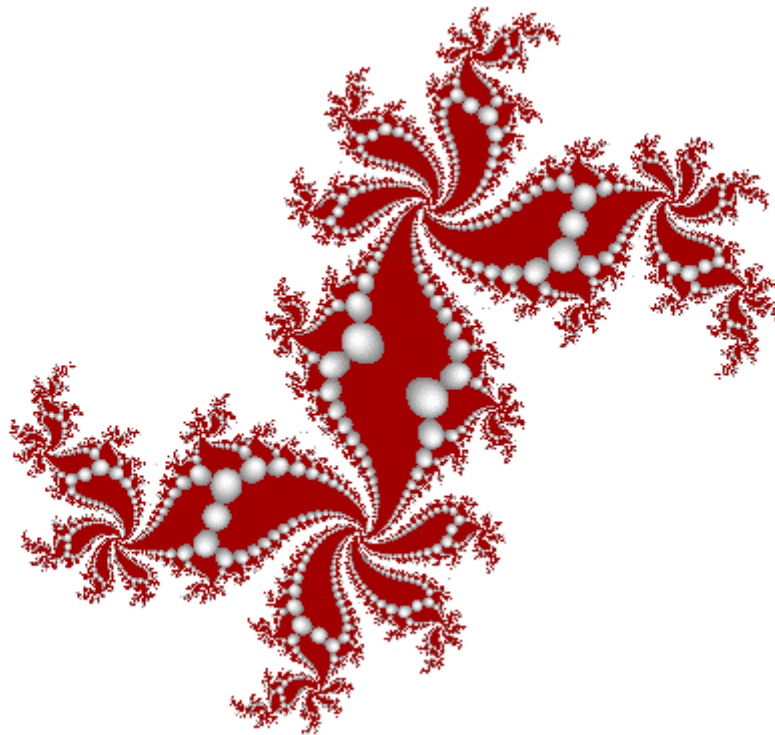
5. Bilder

Hier noch einige Bilder um sich das ganze etwas genauer vorstellen zu können..
Zunächst ein „einfaches“ Apfelmännchen anhand dessen wir die Berechnung erklärt haben.

Anschließend folgend einige faszinierenden Bilder weiterer Fraktale.

Falls ihr noch mehr sehen wollt könnt ihr unter den Quellen suchen, da findet ihr einiges was wirklich interessant anzusehen ist (auch Animationen mit einem Zoom in ein Fraktal!) – Viel Spaß dabei!





6. Quellen

Dietmar Grätzer, Bilder, 22.11.2003, Fraktale-online, 20.05.2004, <http://www.dietmar-graetzer.de/bilder.php>

Jürgen Köller, Apfelmännchen, 2000, Apfelmännchen, 20.05.2004, <http://www.mathematische-basteleien.de/apfelmaennchen.htm>

Alexander F. Walz, Die Mandelbrot-Menge, Nov./ Dez. 2001, Maple bilingual, 20.05.2004, <http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/maple/mfrmandd.htm>

Christian Gloor, Fractals, 1996, Fractal Page, 20.05.2004, <http://chgloor.silmaril.org/cool/fract/fractals.html>

Christian Symmank:, Bilder der Mandelbrot-Menge, Christian Symmank Homepage, 20.05.2004, <http://www.symmank.de/mandelbrot.htm>

Karsten Kremer, Apfelmännchen, 09.03.2002, Karsten's Homepage, 20.05.2004, <http://www.ginko.de/user/kremer/karsten/d/ap-zoom.htm>

7. Selbstständigkeitserklärung

Wir versichern hiermit, dass die vorliegende Arbeit in allen teilen selbstständig erarbeitet wurde. Die Stellen, die wörtlich oder dem Sinn nach den Quellen entnommen wurde, haben wir in der für wissenschaftliche Arbeiten üblichen Form als Entlehnung gekennzeichnet.

St. Blasien , den 22.05.04