

Paradoxien des Unendlichen

Projektarbeit im Mai 2004 im Fach Mathematik von

Sharon Moschner, Claudia Maier und Vera Welz

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so das Gemüt der Menschen bewegt.

Das Unendliche hat wie keine andere Idee auf den Verstand so anregend gewirkt. Das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff der Aufklärung so bedürftig.“¹

Einführung

Bevor wir uns gezielt mit den Zenonschen Paradoxien und der Paradoxie des Unendlichen (Bernhard Bolzano) befassen, gilt es erst einmal den Begriff Paradoxie zu definieren:

Ein Paradoxon, bzw. eine Paradoxie ist „eine scheinbar falsche Aussage, die aber auf eine höhere Wahrheit hinweist.“²
(in unserem Fall die Unendlichkeit).

„Ein Paradoxon ist eine wohlbegründete, bisweilen korrekte Behauptung, die mit der gängigen Meinung nicht Übereinstimmt. Auch ein unfassbarer Gedanke wird als Paradoxon bezeichnet.“³

Viele Paradoxien weisen grundlegende gedankliche Probleme auf. Ein bekannter Vorsokratiker war Zenon von Elea, der schon früh mit seinen paradoxen Konsequenzen Verwirrung stiftete.

Viele Paradoxa hatten einen entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik.

Kurzbiographie: Zenon von Elea

Zenon von Elea, der ungefähr 460 - 490 v. Chr. lebte und ein Sohn des Teleutagoras war, war ein berühmter Mathematiker und Philosoph, der vor allem wegen seinen Paradoxien bekannt geworden ist (Zenonsche Paradoxien), in denen er seine Vorstellungen von der Unendlichkeit verständlich machen will. Wie sein Name es sagt, lebte er in Elea, was dem heutigen Campanien entspricht. Da von Zenon von Elea sehr wenig bekannt ist, kann man über seinen Tod nur spekulieren. Angeblich wurde er im Kampf für die Freiheit des Geistes Opfer von Tyrannen. Er war ein Schüler des Parmenides, der beweisen wollte, dass es keine Vielfalt und keine Bewegung gibt, sondern nur das ruhende Sein. Zenon wollte diese Lehre

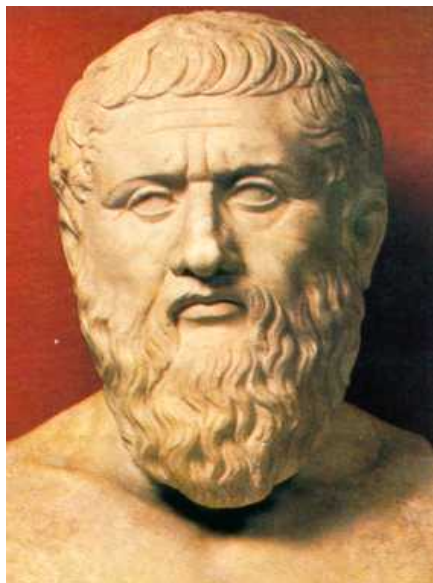
¹ David Hilbert

² Duden S. 594

³ (<http://www.phillex.de/paradoxa.htm>)

unterstützen und beweisen und entwickelte so seine eigenen vier Beweise gegen die Bewegung: Dichotomie-/ Halbierungsparadoxon, Achilles und die Schildkröte, das Paradoxon von Reihen in der Bewegung und das Paradoxon vom fliegenden Pfeil. Diese vier Paradoxien hatten einen großen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik. Zenons Werke bestehen aus ungefähr 40 Werken, 10 davon enthalten sich selbst; leider ist keines dieser Werke heute noch erhalten.

Die Person Zenon und seine Theorien sind bis heute sehr umstritten. Seine Paradoxien sind zwar etwas eigen und kritisch, aber haben einen großen philosophischen Gehalt. Obwohl man Zenon bis heute kein eigenständiges Lehrgebäude zugestanden hat, gilt er als einer der großen Vorsokratiker.



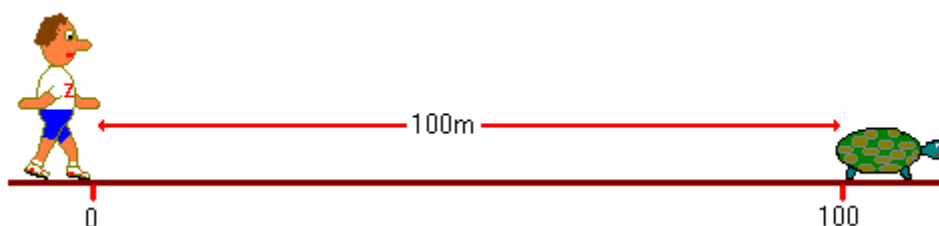
Zenon von Elea (460 - 490 v. Chr.)

Achilles und die Schildkröte

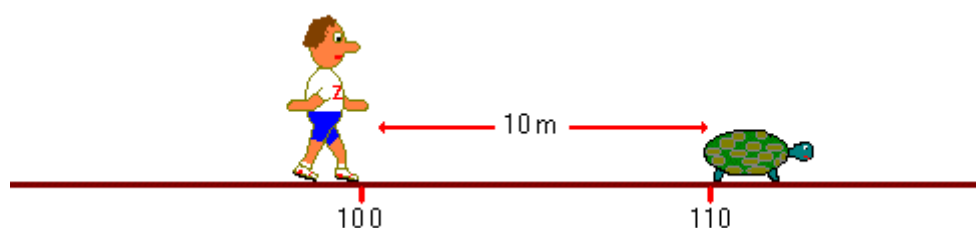
Wir wissen, dass ein schnellerer Läufer, einen langsameren Läufer überholen kann. Hier gilt das Konzept der Bewegung.

Zenon jedoch versucht mit dem Wettlauf des Achilles und der Schildkröte zu zeigen, dass es nicht möglich ist einen langsameren Läufer, der einen gewissen Vorsprung hat, einholen zu können. So versucht er seine Vorstellung von Unendlichkeit und die Idee, dass Bewegung unmöglich ist, verständlich zu machen.

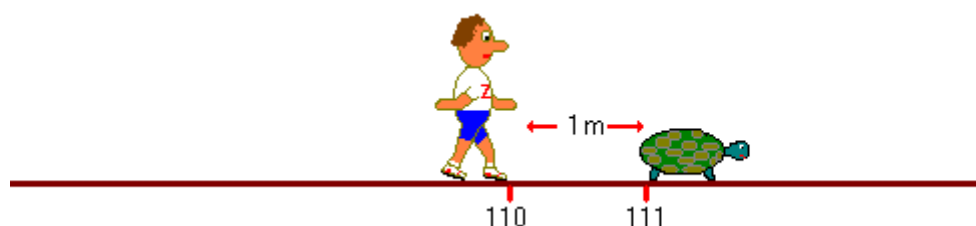
Die Schildkröte wird kaum eine Chance gegen Achilles, den schnellsten Läufer Griechenlands haben. Damit der Lauf aber nicht sofort nach dem Start entschieden ist, bekommt die Schildkröte einen Vorsprung von 100 Metern.



Achilles, der zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte, hat diese 100 Meter natürlich schnell aufgeholt. Eingeholt hat er die Schildkröte dann aber noch nicht, denn die ist in der Zeit ja auch gelaufen und zwar 10 Meter.



Wenn Achilles diese 10 Meter gelaufen ist, ist die Schildkröte aber auch schon wieder ein kleines Stück weiter und hat immer noch einen Vorsprung von einem Meter.



Hat Achilles die 110 Meter erreicht, ist die Schildkröte immer noch vorne, bei 111 Metern, 1 Meter weiter als Achilles. Er wird die Schildkröte nie überholen können.⁴

Betrachtet man also die Bilder, bzw. diese kleinen Teilstrecken, so kann man erkennen, dass die Schildkröte immer einen Vorsprung haben wird, auch wenn dieser immer kleiner wird.

Doch unserer Erfahrung nach kann Zenons Theorie nicht aufgehen. Nach seiner Argumentation dürfte es keine Auffahrunfälle geben, Wettkämpfe könnten nicht existieren, geschweige denn die Olympischen Spiele, bei denen es ja gerade um die Bewegung geht, bzw. darum einen Gegner zu überholen.

DESHALB:

Wir dürfen den Wettlauf des Läufers und der Schildkröte nicht in kleinen Zeitabschnitten betrachten, sondern in seiner Gesamtheit. Dazu versuchen wir den Zeitpunkt zu berechnen, zu dem der Läufer das Tier eingeholt hat:

Zeit	Achilles	Schildkröte	
10 s	100 m	110 m	(die ersten 100 m läuft er in 10 s)

⁴ (Bilderquelle: www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/achill/achill.html)

11 s	110 m	111 m	(die folgenden 10 m läuft er in 1 s)
11,1 s	111 m	111,1 m	(den noch fehlenden Meter in 1/10 s, dann noch 1/100 s , usw.)

12 s	120 m	112 m
-------------	--------------	--------------

Addieren wir alle Zeiten auf, vom Start bis zur Einholung der Schildkröte, so erhält man einen Zeitpunkt:

$10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 \dots$

Nach 11,111111... Sekunden hat Achilles die Schildkröte eingeholt und nach bereits 12 Sekunden hat er sie überholt und macht sich auf und davon.

„Man kann tatsächlich ohne Unterlass Zahlen addieren, ohne dass das Ergebnis beliebig groß wird. Dies ist dann möglich, wenn die Zahlen, die aufaddiert werden, auf geeignete Weise immer kleiner werden. Man sagt dann, die Summe **konvergiert.“**

„Die Summe konvergiert, sie wird nicht unendlich groß. Tatsächlich ist ihr Wert 11.111111....“⁵

Zenons Paradoxon vom fliegenden Pfeil

„Der fliegende Pfeil ruht. Denn falls etwas ruht, wenn es einen selbst entsprechenden Raum einnimmt, und wenn etwas fliegendes jederzeit einen ihm selbst entsprechenden Raum einnimmt, dann kann es sich nicht bewegen.“⁶

Zenons Paradoxon vom fliegenden Pfeil ist einer seiner bekanntesten Beweise gegen die Bewegung.

Zenon von Elea ist der Meinung, dass der fliegende Pfeil ruht. Wir wissen, dass das natürlich nicht der Fall sein kann, doch Zenon von Elea hat diesbezüglich seine eigene Theorie aufgestellt:

Der fliegende Pfeil bewegt sich nur scheinbar. In der Realität befindet er sich in jedem Augenblick in einem bestimmten Raumteil. Dieses Befinden in einem bestimmten Raumteil kann man auch als „Sein“ verstehen. „Sein“ bedeutet aber Ruhen. Da die Flugbahn eines Pfeils aus unendlich vielen Augenblicken besteht und der Pfeil in dem jeweiligen Raumteil, in dem er sich befindet, ruht, ist Bewegung laut Zenon von Elea eine reine Illusion.

Bernhard Bolzano, Cantor und die Mengenlehre

Schon seit über 200 Jahren beschäftigte man sich in der Mathematik mit Mengen. Aristoteles (384-322 v. Chr.) beispielsweise entwickelte die These, dass es unendlich

⁵ (Zitat: www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/achill/achill.html)

⁶ Aristoteles

viele natürliche Zahlen gibt, denn addiere man zu einer Zahl immer und immer wieder 1, so gelange man über jede Grenze hinaus.

Galileo Galilei argumentierte, dass die Anzahl der Quadratzahlen mit der der natürlichen Zahlen übereinstimmt, da man übereinander geschrieben aus der einen Zahlenreihe jeweils einen Partner aus der zweiten Zahlenreihe zuordnen kann. Seine zweite Behauptung, dass es weniger Quadratzahlen als natürliche Zahlen gibt, da beispielsweise 2, 3 und 5 natürliche Zahlen, jedoch keine Quadratzahlen sind, widerspricht der ersten Behauptung.

Solche Überlegungen führten zu Paradoxien des Unendlichen und spiegeln wieder wie schwierig, aber auch faszinierend es ist sich mit dem Begriff der Unendlichkeit zu befassen.

Der 1781 in Prag geborene Mathematiker, Philosoph und Theologe Bernhard Bolzano beschäftigte sich ebenfalls mit dem Begriff der Unendlichkeit und übertrug dies auf die Mengenlehre. Nachdem er 1805 als katholischer Priester wegen angeblicher Irrlehren abgesetzt worden war, arbeitete er unter Polizeiaufsicht an der „Wissenschaftslehre“, seinem Hauptwerk. Sein Werk „Paradoxien des Unendlichen“ beinhaltet Entscheidendes über die Mengenlehre und so war Bolzano ein Wegbereiter für den Mathematiker Georg Cantor (1845-1918), der die Mengenlehre entwickelte. Es begann gewissermaßen eine neue Geburtsstunde der Mathematik, als durch die Mengenlehre der Umgang mit den unendlichen Mengen möglich war.

„Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (genannt die Elemente der Menge) zu einem Ganzen“⁷

Cantor argumentierte, dass jede Menge außer der leeren Elemente besitzt. Ist „x“ beispielsweise ein Element der Menge „A“, so schreibt man: $x \in A$. Auch eine bestimmte Menge selbst kann Element einer Menge sein. Man spricht dann von einer Teilmenge, $\subseteq$.

Um zu demonstrieren, dass zwei verschiedene Mengen die gleiche Anzahl an Elementen haben, ist ein Abzählen der Elemente nicht unbedingt von Nöten. Ein paarweises Gegenüberstellen der Elemente ist ausreichend. Aus einem solchen Gegenüberstellen ergibt sich folgende Definition:

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ nennt man bijektiv, wenn gilt:

- 1.) Aus $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ folgt $f(a_1) \neq f(a_2)$ und
- 2.) zu jedem $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.⁸

Eine solche Funktion bezeichnet man als Bijektion. Man spricht von Gleichmächtigkeit zweier Mengen A und B, wenn eine Bijektion von A nach B existiert. Dies klingt zunächst alles logisch. Nun gibt es allerdings zwischen gleichmächtigen Mengen mit mindestens zwei Elementen durchaus auch Zuordnungen, die keine Bijektion zulassen. Somit darf man aus einer nicht-bijektiven Zuordnung zweier Mengen nicht automatisch den Schluss ziehen, dass die beiden dargestellten Mengen nicht gleichmächtig sind.

⁷ Definition von Georg Cantor (<http://members.chello.at/gut/.jutta.gerhard/kurs/mengen.htm>)

⁸ Lambacher Schweizer Analysis LK; S. 270

Nun gilt es zu untersuchen, ob die Menge der natürlichen Zahlen mit der Menge der geraden Zahlen übereinstimmt, ob sie gleichmächtig sind:

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 6$$

$$4 \rightarrow 8$$

...

Diese Anordnung stellt eine Bijektion von der natürlichen zur geraden Zahlenmenge dar. Doch lässt sich dies mit unserer Denkweise vereinen? Ist die Menge der natürlichen Zahlen nicht größer als die der geraden? Die folgende Anordnung zeigt, dass man die Elemente der beiden Mengen nämlich auch nicht-bijektiv zuordnen kann. Nun ist man wieder bei der Paradoxie des Galilei angelangt.

$$0 \rightarrow 0$$

$$1$$

$$2 \rightarrow 2$$

$$3$$

$$4 \rightarrow 4$$

$$5$$

$$6 \rightarrow 6$$

...

Galileis Argumentation ist nun so aufzufassen: Die Menge der geraden Zahlen ist eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen. Eine Teilmenge ist als echte zu bezeichnen, sobald sie weniger Elemente hat als die Menge an sich. Daraus folgt wiederum, dass eine Menge und eine echte Teilmenge dieser nie gleichmächtig sein können, was verständlich ist, aber lediglich mit unserer bisherigen Erfahrung zu vereinen ist. Diese unsrige Erfahrung schließt den Umgang mit der Unendlichkeit nicht mit ein. Man darf die Erfahrungen bezüglich der endlichen Mengen nicht auf die unendlichen übertragen. Es gilt, das zu akzeptieren, was einem unmöglich erscheint. So nehme man beispielsweise hin, dass unendliche Mengen durchaus zu Teilmengen gleichmächtig sind!

So wird einem klar, warum „das Unendliche (wie) keine andere Frage von je her so tief das Gemüt der Menschen bewegt“⁹ hat.

⁹ David Hilbert

Quellen:**Literatur:**

Duden S.594

Gerhard Frey: „Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik“
S. 92, 93

H. Athen und J. Bruhn: „Lexikon der Schulmathematik“
S. 80, 123

Lambacher Schweizer Analysis LK
S. 268-271

Dr. Oskar Becker: „Größe und Grenze der mathematischen Denkweise“
S. 95, 111

Hirschberger: „Geschichte der Philosophie: Altertum und Mittelalter“

Internet:**Zenon:**

<http://www.philosophenlexikon.de/zenon.de/-e.htm>

<http://www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/achill/achill.html>

<http://www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/achill/achill2.html>

<http://www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/achill/achill3.html>

<http://www.philex.de/zenparad.htm>

<http://www.philex.de/paradoxa.htm>

<http://www.philex.de/halbier.htm>

<http://www.philex.de/achilles.htm>

<http://www.philex.de/reihen.htm>

<http://v.hdm-stuttgart.de/seminare/ie2003/p.html>

<http://www.cp-b.de/philosophie/paradoxien.htm>

<http://www-users.rwth-aachen.de/gunter.heim/HTMLarchiv/011101.htm>

<http://centros5.phic.mec.es/.../Mathis/Zenon/Zenon.jpg>

http://www.sternwelten.at/ar_zenon_elea.shtml

Bolzano, Cantor, Mengenlehre:

<http://members.chello.at/gut/.jutta.gerhard/kurs/mengen.htm>

<http://www.austria.cz/kultur/bolzano/paradoxien.html>

<http://ls11-www.informatik.uni-dortmund.de/people/ziegler/CompTheolReader.html>

http://www.philos-website.de/autoren/bolzano_g.htm

<http://www.philosophenlexikon.de/bolzano.htm>

<http://wikipedia.t-st.de/data/Mathematik>

<http://matheboard.de/lexikon/index.php/Mathematik>

http://www.500jahre.uni-halle.de/main/museum_main/pic/mengenlehre.pdf

http://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/unendlich/vortrag_m.htm

Bilder:

<http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~benes/mathphotos.html>

<http://www.svarog.org/filozofija/filosofi.php>