# Primzahlen

## 1.Einführung

2,3,5,7,9,11,13…

Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst aber durch sonst keine ganze positive Zahl teilbar sind.
Die Zahl 1 zählt, obwohl die obige Definition auch auf sie zutrifft, nicht zu den Primzahlen.
Es existieren unendlich viele Primzahlen, ihre Verteilung ist jedoch unregelmäßig und bei höheren Zahlen treten sie immer seltener auf.
Da die Primzahlen Bausteine der ganzen Zahlen sind, ist ihre Untersuchung eine der Grundaufgaben der Zahlentheorie[1].
Gauß[2] fand Ende des 18. Jahrhunderts eine Näherungsformel zur Berechnung der Anzahl von Primzahlen. Diese nähert sich demnach mit wachsendem x dem Wert x/ln(x) an.
Jede natürliche Zahl n > 1 kann eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden (Bsp.: 15 = 5 * 3), dies nennt man Primfaktorenzerlegung (wichtig für den Beweis nach Euklid).

Den Primzahlen kommt gerade heutzutage, im Zeitalter des Internets und der Medienkommunikation mehr und mehr Bedeutung zu.
Sie sind einer der wichtigsten Bestandteile der Kryptologie[3] und bilden die Basis für das, bis heute am sichersten geltende Verschlüsselungsverfahren: Die RSA- Methode.[4]
Die Schlüssel entstehen hierbei aus der Multiplikation zweier großer Primzahlen mit mehreren hundert Stellen. Die Sicherheit beruht darauf, dass es äußerst schwer ist das Produkt zweier sehr großer Primzahlen wieder in Faktoren zu zerlegen.
Im Zuge dieser Entwicklungen suchen ganze Forschungsabteilungen nach immer neuen, immer größeren Primzahlen.
Bis zum heutigen Zeitpunkt sind gesetzmäßige Aufeinanderfolgen noch nicht auszumachen, zum Teil auch wegen der äußerst unregelmäßigen Verteilung der Primzahlen unter den natürlichen Zahlen (2, 3,5,7,9,11,13 doch dann:17,19…).
Mit dem Sieb des Eratosthenenes [5] lassen sich Primzahlen in einem Bereich von 1 bis 1 000 000 000 000 000 relativ leicht und mit wenig Aufwand finden.
Neben den einfachen Primzahlen existieren die so genannten Primzahlzwillinge. Es handelt sich hierbei um Paare aus Primzahlen die im Abstand 2 aufeinander folgen ( z.B. 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13). Die (Un-)Endlichkeit der Primzahlzwillinge ist bis heute ungeklärt.

[1] Zahlentheorie: Zweig der Mathematik, der sich mit den Eigenschaften und Beziehungen von Zahlen beschäftigt

[2] Gauß, Carl Friedrich (1777-1855), deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker.

[3] Kryptologie: Wissenschaft von der Ver- und Entschlüsselung von Sprachzeichen bzw. dem Ver- und Entschlüsseln von Geheimsprachen

[4] Ron Rivest, Adi Shamir und Leonhard Adleman

[5] Eratosthenes : Griechischer Mathematiker, Astronom, Geograph und Dichter; 276-196 v. Chr.

## 2. Geschichte der Primzahlen

Primzahlen in die Geschichte einzuordnen ist nur schwer möglich, da es sie schon immer gab und immer geben wird. In manchen Epochen jedoch wurden sie verstärkt erforscht, so geht es weniger um die Geschichte der Primzahlen selbst, als um die Chronologie ihrer Entwicklung.
Schon im **alten Griechenland** haben sich Mathematiker wie Euklid und Eratosthenes und Forscher der pythagoräische Schule im Zusammenhang mit Primzahlen einen Namen gemacht. So machten jene zwar äußerst wichtige mathematischen Entdeckungen, doch es gelang ihnen nie ihre Theorien zu beweisen.
Die Primzahlforschung schien zu ihrem vorläufigen Ende gelangt zu sein bis Euklid 300 v. Chr. die Unendlichkeit der Primzahlen bewies und damit ein neues Zeitalter der Primzahlforschung einleitete: Erstmals wurde ein Widerspruch benützt um eine Vermutung zu begründen.
200 v. Chr. etwa endete die Ära der großen Mathematiker mit Eratosthenes. Er entdeckte einen Algorithmus zum Berechnen von Primzahlen.
Die Entdeckungen jener griechischen Mathematiker gerieten jedoch während des **Mittelalters** und der **Römerzeit** weitgehend in Vergessenheit und erst in der Renaissance begann die Mathematik und demnach auch Primzahlen wieder von Interesse zu sein.
Doch auch die **Neuzeit** brachte Bahnbrechende Entdeckungen. So bewies der Mathematiker Fermat zu Beginn des 17. Jahrhunderts , dass jede Primzahl der Form 4n + 1 als Summe von zwei Quadranten geschrieben werden kann. Auch Mersenne, ein Schweizer Mönch, beschäftigte sich ausführlich mit Primzahlen und entdeckte dabei eine ganz spezielle Form der Primzahlen, die heute den Namen „ Mersennesche Primzahl“ trägt.
Nach dem alten Griechenland, dem Mittelalter und der Neuzeit- Epochen die den Grundbaustein für die Primzahlforschung legten- folgt nun das **Computerzeitalter**, welches etwa in der Mitte unseres Jahrhunderts seinen Ursprung findet. So werden heutzutage zwar keine neuen Theorien aufgestellt, jedoch mit Hilfe von neuesten Computer Programmen, so wie dem GIMPS („Great Internet Mersenne Prime Search“) – einem Internet Programm, bei dem jeder Teilnehmer einen bestimmten Zahlenraum zugewiesen bekommt, den er nach Mersenneschen Primzahlen absucht- Primzahlenrekorde aufgestellt. Der größte momentan bekannte Primzahlzwilling ist 242206083×2hoch 38880, entdeckt von dem Amerikaner Caldwell, der sich wie viele andere bekannte Mathematiker mit der Frage beschäftigt ob es unendlich viele Primzahlen gibt.

## 3.Primzahlen überprüfen
## 3.1 Sieb des Eratosthenes

Etwa 200 v. Chr. entwickelte der Mathematiker Eratosthenes ein Verfahren zur Überprüfung von Primzahlen, das „Sieb des Eratosthenes“.
Bei diesem Verfahren erweist es sich als günstig eine Liste aller natürlichen Zahlen, die man überprüfen möchte, tabellarisch auf zu schreiben:

Das folgende Verfahren besteht aus sechs Schritten, in denen jede Zahl überprüft wird:

1. im ersten Schritt wird die 1 weg gestrichen, da 1 keine Primzahl ist
2. nun kommt man zur 2, die bis jetzt noch nicht weg gestrichen wurde und daher eine Primzahl ist. Die zwei wird als Primzahl gekennzeichnet.
3. als nächstes werden alle weiteren Zahlen, die ebenfalls durch 2 teilbar sind, weg gestrichen, da diese keine Primzahlen sein können- sie hätten jeweils den Teiler 1, 2 und sich selbst
4. Die 3 ist nun die nächste ungestrichene Zahl- wir markieren sie 3 als Primzahl
5. wie in Schritt 3 werden nun alle Zahlen weg gestrichen, die durch 3 teilbar sind, da diese auch keine Primzahlen mehr sein können.
6. jetzt wird Schritt 4 und 5 wiederholt, bis alle Zahlen entweder als Primzahlen markiert oder als Nichtprimzahlen durch gestrichen sind.
   ACHTUNG: Diese Schritte müssen nicht bis ins Unendliche fortgesetzt werden, sondern nur bis zu der Zahl, die größer oder gleich der Wurzel des zu überprüfenden Bereich ist: z.B.: 10 bei 100, 32 bei 1000 da $10\times10=100$, bzw. $32\times32=1024$ und $1024>1000$

## 4. Unendlichkeit der Primzahlen
## 4.1 Beweis nach Euklid

(versuchsweise) Annahme Euklids:
Es gibt nur endlich viele Primzahlen.
- Folgerung: es muss eine „größte aller Primzahlen“ geben, welche die Folge der Primzahlen nach oben hin begrenzt. Diese bezeichnen wir mit n.
- Liste aller Primzahlen mit n: (A):2,3,5,7,13…n

Widerlegung der oben genannten Annahme:
Wir betrachten das Produkt aller Primzahlen plus 1 (**(B)**:2* 3* 5* 7* 9* 11* 13...* n+1).
**(B)** wäre größer als n könnte also, wenn man davon ausgeht, dass n die Größte aller Primzahlen ist, selber keine Primzahl sein, sie müsste also einen Teiler **f** besitzen der von 1 und ihr selbst verschieden ist.
Da **(B)** das Produkt aller Primzahlen plus 1 ist, kann **f** selber keine Primzahl sein, weil immer ein Rest 1 bliebe.
Eine natürlich Zahl n > 1, die keine Primzahl ist, kann in ein Produkt aus Primzahlen zerlegt werde (Bsp.:12= 3* 3* 2; 15=3* 5), folglich müsste auch dieser Teiler in ein solches Produkt zerlegt werden können.

Diese Primfaktoren müsste wiederum die Zahl **(B)** teilen(wenn eine Zahl z.B. von 15 geteilt wird, dann auch von den Primfaktoren 3 und 5). Es müsste also mindestens eine Primzahl existieren die, die Zahl **(B)** teilt.
Wie wir jedoch bereits wissen lässt sich **(B)** nicht restlos durch irgendeine Primzahl aus **(A)** teilen (, da immer ein Rest 1 übrig bleibt (wegen: 2* 3* 5*7 ...* n+1)).
Daraus schließen wir, dass es eine Primzahl geben muss die nicht in unsere Liste 2, 3, 5, 7...n passt. Also haben wir in dieser Liste **(A)** nicht alle Primzahlen aufgezählt. Es gibt folglich keine „größte aller Primzahlen" denn die Folge der Primzahlen ist unendlich.
Die oben genannte Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen führt also zu einem Widerspruch und wird durch die indirekte Beweisführung widerlegt.

## 5. Primzahlentypen

### 5.1 Mersennesche[6] Primzahlen

Unter Mersennschen Primzahlen versteht man Zahlen der Form:
$2^1$-1, $2^2$-1, $2^3$-1,$2^4$-1, $2^5$-1, $2^6$-1,$2^7$-1,$2^8$-1, …
Sie sind jeweils um eins kleiner als die Potenzen der Zahl 2: 1,3,7,15,31,63,127,255….
Verallgemeinert schreibt man $2^n$-1 für die n-te Mersenne Zahl.
Sind die Mersenne Zahlen n Primzahlen, so handelt es sich auch bei dem Ergebnis um eine Primzahl.

Bsp.: Für n = 2: $2^2$-1 = 4-1 = 3 ist eine Primzahl
Für n = 3: $2^3$-1 = 8-1 = 7 ist eine Primzahl
Für n = 5: $2^5$-1 = 32-1 = 31 ist eine Primzahl
Usw.

Sind sie Mersenne Zahlen n wiederum keine Primzahl, so ist auch das Ergebnis keine Primzahl.

Bsp.: Für n = 4: $2^4$-1 = 16- 1 = 15 ist keine Primzahl
Für n = 6: $2^6$-1 = 63- 1 = 62 ist keine Primzahl
Für n = 8: $2^8$-1 = 126- 1 = 125 ist keine Primzahl

Ob es unendlich viele Mersenne Primzahlen gibt ist bisher ungeklärt, jedoch vermutet man auf Grund von plausiblen Heuristiken[7], dass es etwa c* ln x – viele Mersenne Primzahlen gibt mit p < x.

[6] Mersenne, Marin (1588–1648), französischer Mathematiker, Philosoph, Theologe und Musiktheoretiker.

[7] Heuristik (von griechisch heurískein: finden, entdecken), ursprünglich Bezeichnung für die Erfindungskunst; eine Verfahrensweise zur Problemlösung und zum entdeckenden Auffinden bzw. zur Begründung neuer Erkenntnisse durch Formulierung von Hypothesen und die Suche nach einer zur Verifizierung geeigneten Beweisführung.

.

## 6. Quellenangabe

www.primzahlen.de
encarta 2002
www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/ mathe/m6/vollkommenezahlen.doc
http://home.t-online.de/home/arndt.bruenner/mathe/scripts/primzahlen.htm

Autoren: Louisa zu Löwenstein und Josephine von Perfall